2. 자연계열

1) 모의 논술문제

[문항 1]

제시문을 읽고 다음 물음에 답하라.(글자 수 제한 없음, 50% 배점)

한국대학교는 교수 100명의 직접투표를 통해 총장 선거를 실시했다. 총장후보자는 A, B, C, D 네 사람이고, 유권자인 교수 100명은 투표용지에 각 후보자의 순위를 적는 방식으로 선거가 진행되었으며, 투표 결과는 다음의 표와 같다.

득표수(명)	1위	2위	3위	4위
35	A	B	C	D
1	A	B	D	C
0	A	C	B	D
1	A	C	D	B
0	A	D	B	C
1	A	D	C	B
0	B	A	C	D
0	B	A	D	C
0	B	C	A	D
1	B	C	D	A
0	B	D	A	C
10	B	D	C	A
0	C	A	B	D
0	C	A	D	B
2	C	B	A	D
25	C	B	D	A
0	C	D	A	B
3	C	D	B	A
0	D	A	B	C
0	D	A	C	B
0	D	B	A	C
1	D	B	C	A
0	D	C	A	B
20	D	C	B	A

투표결과 4명의 후보들은 각자가 총장이 되어야 한다고 주장하였고, 학교의 이사회는 토론 끝에 후보 D를 탈락시킨 후 교수 20명으로 총장 후보 추천 위원회를 새롭게 구성하여 이들로 하여금 후보 A, B, C 를 각자 선호하는 순서대로 적는 2차 투표를 실시하였다. 위원회는 2차 투표 결과 단순히 1순위를 가장 많이 얻은 후보가 총장으로 당선된다고 룰을 정했고, 개표결과 20명의 위원들 중 11명이 A보다 B를 선호하였고, 14명이 B보다 C를 선호하였으며, 12명이 C보다 A를 선호하였고, 또한 아래 표에서 개표결과 발생 가능한 6가지 결과의 득표수를 나타내는 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 중 단 하나도 0이 아니었다고 공표하였다.

득표수(명)	1위	2위	3위
f_1	A	B	C
f_2	A	C	B
f_3	B	A	C
f_4	B	C	A
f_5	C	A	B
f_6	C	B	A

【1-1】 1차 투표결과 세 명의 후보 A, B, C 모두 각자 자신이 총장이 되어야 한다고 주장하였을 때 그 이유가 나름대로 의미 있다고 받아들여진 이유를 설명하시오.

【1-2】 1차 투표에서 탈락한 후보 D가 총장이 되어야 한다고 주장할 수 있는 근거를 나름의 논리로 설명하시오.

【1-3】 2차 투표 후 위원회가 공표한 내용만으로 총장 당선자가 결정되었다고 말할 수 있는가? 만일 그렇다면 총장 당선자는 누구인가?

[문항 2]

제시문 [가] [나] [다] [라]를 읽고 다음 물음에 답하라.(글자 수 제한 없음, 50% 배점)

[가] $a>0$ 가 양의 실수이고 n 이 자연수일 때 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $a^0=1$ 으로 정의함으로써 양의 실수의 거듭제곱을 정수로 확장시킬 수 있으며, m 이 2이상의 자연수이고 n 이 자연수일 때 $a^{n/m}=\sqrt[m]{a^n}$ 으로 정의하고 r 이 양의 유리수 일 때 $a^{-r}=\frac{1}{a^r}$ 로 정의함으로써 양의 실수 a 의 거듭제곱을 유리수까지 확장시킬 수 있다. 이때 자연수 지수에서의 지수법칙은 유리수 지수에서까지 성립함을 쉽게 보일 수 있다. 즉 $a>0$ 인 실수와 임의의 유리수 p, q 에 대하여 $a^pa^q=a^{p+q}$ 그리고 $(a^p)^q=a^{pq}$ 가 성립한다.

[나] 양수의 거듭제곱은 임의의 실수 지수로 확장될 수 있다. 즉 $a>0$ 와 x 가 임의의 실수일 때 a^x 을 유리수 지수의 확장이면서 실수에서도 지수법칙이 성립하도록 정의할 수 있다. 실제로, 위로 유계인 단조증가 수열이 반드시 극한을 갖는다는 실수의 기본성질, 수학적으로 표현하자면 무한수열 $\{a_n\}$과 어떤 양수 M이 있어, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \le a_{n+1}$이고 $a_n < M$ 이면, 수열 $\{a_n\}$은 적당한 실수에 수렴하는 성질을 사용하여 a^x 를 정의할 수 있다.

[다] 우선 $a>1$, $x>0$ 이라 가정하고, $x=x_0.x_1x_2\cdots x_k\cdots$ 을 x 의 무한소수 표기라고 하자. 이때 $x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots$ 은 모두 음이 아닌 정수이다. p_n 을 x 를 소수 n 번째 자리까지 표기한 유리수, 즉 $p_n=x_0.x_1x_2\cdots x_n$ 라 정의하면 수열 $\{p_n\}$ 은 $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n \le \cdots$ 을 만족하면서 (즉, 단조증가하면서) 주어진 양의 실수 x 로 수렴한다. 즉 수열 $\{a^{p_n}\}$은 단조증가이며 위로 유계이므로 극한이 존재한다. 이제 $a^x=\lim a^{p_n}$ 으로 정의한다. 다음으로 $0<a<1$, $x>0$ 인 경우는 $a=1/b$ 로 놓고, $b>1$ 임을 이용하여 위의 방법으로 정의된 b^x에 대하여 $a^x=1/b^x$ 라 정의한다. 끝으로 $x<0$ 인 경우 $a^x=1/a^{-x}$ 으로 정의한다.

이렇게 정의된 함수 $f(x)=a^x$ 는 실수 위에서 연속이다. 즉, 임의의 실수 x_0 에 대하여 $\lim_{x\to x_0} a^x=a^{x_0}$ 가 성립한다.

[라] 함수 $f(x)=2^x$ 는 실수 전체에서 연속이며 $f(1)=2, f(2)=4$ 이다. 따라서 중간값의 정리에 의하여 $2^w=3$ 을 만족하는 w가 개구간 $(1,2)$에 존재하며 또한 $f(x)=2^x$ 는 증가함수이므로 이러한 w는 유일하게 존재한다. 우리는 $2^w=3$ 을 만족하는 유일한 w를 $\log_2 3$ 으로 나타낸다. 이와 마찬가지의 방법으로 $\log_2 5$ 와 $\log_2 15$ 도 정의된다.

【2-1】 a가 양의 실수이고 p, q 가 양의 유리수일 때, 자연수 지수에서의 지수법칙을 이용하여 [가]에서 언급한 $a^p a^q = a^{p+q}$ 가 성립함을 보이시오.

【2-2】 [나]의 밑줄 친 성질을 참조하여 $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \cdots$ 으로 정의된 무한수열이 수렴함을 보이고, 이 수열의 극한값을 구하시오.

【2-3】 [다]의 내용을 바탕으로 양의 실수 x, y 에 대하여 $2^x 2^y = 2^{x+y}$가 성립함을 보이고 이를 이용하여 [라]에서 정의된 $\log_2 3$, $\log_2 5$, $\log_2 15$ 에 대하여 $\log_2 15 = \log_2 3 + \log_2 5$ 가 성립함을 보이시오.

2) 해설

[문항 1]

【1–1】

1순위를 가장 많이 얻은 후보가 당선되기로 할 때, 38표로 1순위를 가장 많이 얻은 후보 A가 총장에 당선되어야 한다. 이는 국회의원 선거에서 당선자가 나오는 방식과 금메달의 숫자로만 올림픽 출전국가의 순위를 매기는 방식과 같다.

1순위에게 4점, 2순위에게 3점, 3순위에게 2점, 4순위에게 1점을 주어 그 점수를 합하는 방법을 택할 때, B는 총점 284로 가장 높은 점수를 얻어 281점으로 2위를 차지한 후보 C를 누르고 총장에 당선된다. 이는 A는 4점, B는 3점, C는 2점, D는 1점으로 간주하여 성적을 산출하는 대학교 학점 평가 방식과 같다.

후보끼리 일대일로 선호도를 비교할 때, C:A = 62:38 , C:B = 52:48 , C:D = 67:33 로 후보 C가 당선된다. 이는 출전 팀들이 일대일로 풀리그를 벌여서 우승자를 결정짓는 운동경기에 비교할 수 있다.

【1–2】

1위 최소득표 후보를 차례로 탈락시키고 마지막으로 남은 후보가 당선되는 방식을 고려해보자. 투표 시 처음부터 지지하는 후보를 1순위, 1순위 후보가 탈락할 때 지지하는 후보를 2순위, 2순위 후보가 탈락할 때 지지하는 후보를 3순위 등으로 기표하면 단 한번 투표로 최종 당선자를 선출할 수 있다. 이런 방식을 택하는 경우 1 순위 지지자가 11명뿐인 후보 B가 가장 먼저 탈락하고, B가 없는 상황에서 투표결과를 상정하면 후보 C가 이어서 탈락하고 최종 선발은 남은 후보 A와 D 중 다수의 표를 얻은 후보 D가 당선된다.

【1–3】

주어진 식 , $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6=20$, $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \geq 1$와
$f_3+f_4+f_6=11$, $f_2+f_5+f_6=14$, $f_1+f_2+f_3=12$ 로부터
$f_1+f_2+f_5=9$, $f_1+f_3+f_4=6$, $f_4+f_5+f_6=8$을 얻는다.

이중 가장 간단한 식 $f_1+f_3+f_4=6$으로부터 $2 \le f_3+f_4 \le 5$ 가 성립하므로 $f_3+f_4=2, 3, 4, 5$를 각각 대입해서 $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ 를 구하도록 한다.

(i) $f_3+f_4=2$ 인 경우 $f_1=4, f_3=1, f_4=1$ 이고 $f_1+f_2+f_3=12$ 로부터 $f_2=7$ 을 얻으나 이는 식 $f_1+f_2+f_5=9$을 만족할 수 없다.

(ii) $f_3+f_4=3$ 인 경우 $f_1=3, f_3=1, f_4=2$ 또는 $f_1=3, f_3=2, f_4=1$ 가 성립하나 이는 $f_1+f_2+f_3=12$ 와 $f_1+f_2+f_5=9$ 를 동시에 만족할 수 없다.

(iii) $f_3+f_4=4$ 인 경우 $f_3+f_4+f_6=11$ 으로부터 $f_6=7$을 얻으나 이는 $f_4+f_5+f_6=8$ 를 만족할 수 없다.

(iv) $f_3+f_4=5$인 경우 $f_1=1$이고 $f_3+f_4+f_6=11$으로부터 $f_6=6$ 을 얻고 $f_4+f_5+f_6=8$ 로부터 $f_4=1, f_5=1$ 을 얻고 따라서 $f_3=4$ 이고 $f_1+f_2+f_3=12$ 로부터 $f_2=7$을 얻는다.

이렇게 얻어진 $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)=(1, 7, 4, 1, 1, 6)$ 은 모든 식을 만족한다.

따라서 위원회가 공표한 내용만으로 총장 당선자가 유일하게 결정되며, 당선자는 8명에게서 1위 득표를 얻은 후보 A 이다.

[문항 2]

【2-1】

$p=\frac{n}{m}$, $q=\frac{i}{j}$ (i, j, m, n 은 자연수) 라 놓고, 자연수 지수에서의 지수법칙을 사용하면

$a^p a^q = a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{i}{j}} = \sqrt[m]{a^n}\,\sqrt[j]{a^i} = \sqrt[mj]{a^{nj}}\,\sqrt[mj]{a^{mi}} = \sqrt[mj]{a^{nj}a^{mi}} = \sqrt[mj]{a^{nj+mi}}$ 이고, 정의에 의하여

$\sqrt[mj]{a^{nj+mi}} = a^{\frac{nj+mi}{mj}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{i}{j}} = a^{p+q}$ 이다. 따라서 $a^p a^q = a^{p+q}$ 가 성립한다.

【2-2】

먼저 $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 으로 정의된 수열이 단조증가하며 위로 유계임을 수학적 귀납법으로 보이자.

$a_1=\sqrt{2}<2$ 이다. 이제 임의의 자연수 k에 대하여 $a_k<2$ 라고 가정하자.

이때 $a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<\sqrt{2+2}=2$ 이므로 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n<2$ 이다. 따라서 위 수열은 위로 유계이다. 또한 $a_n<2$ 과 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 으로부터 $a_{n+1}^2=2+a_n>a_n+a_n=2a_n>a_n^2$ 이므로 위 수열은 단조증가이다.

위 수열은 단조증가이고 위로 유계이므로 제시문 [나]에 의하여 극한이 존재한다.

$x=\lim_{n\to\infty} a_n$ 이라 놓으면 $x>0$ 이고, $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 에서 $n\to\infty$ 의 극한을 취하면

$x=\sqrt{2+x}$ 즉 2차 방정식 $x^2-x-2=0$ 가 성립하고, $x>0$ 이므로 $x=2$ 를 얻는다.

따라서 위 수열이 수렴하는 극한값은 2이다.

【2-3】

양의 실수 x, y의 무한소수 표기를 각각 $x=x_0.x_1x_2\cdots x_k\cdots$과 $y=y_0.y_1y_2\cdots y_k\cdots$라 하고, 자연수 n에 대하여 유리수 p_n, q_n를 $p_n=x_0.x_1x_2\cdots x_n$ 그리고 $q_n=y_0.y_1y_2\cdots y_n$라 정의하면 제시문 [다]에 의하여 $2^x=\lim_{n\to\infty}2^{p_n}$, $2^y=\lim_{n\to\infty}2^{q_n}$그리고 $2^{x+y}=\lim_{n\to\infty}2^{p_n+q_n}$ 이다. 수렴하는 수열에서 극한의 성질과 유리수 지수에서의 지수법칙에 의하여 다음이 성립한다.

$$2^x2^y=\lim_{n\to\infty}2^{p_n}\lim_{n\to\infty}2^{q_n}=\lim_{n\to\infty}2^{p_n}2^{q_n}=\lim_{n\to\infty}2^{p_n+q_n}=2^{x+y}$$

이제 $\log_2 3=x$ 그리고 $\log_2 5=y$ 라 놓으면 $2^x=3,\ 2^y=5$ 이고 x, y는 양의 실수이므로

$15=3\times5=2^x2^y=2^{x+y}$가 성립한다. 따라서 $\log_2 3+\log_2 5=x+y=\log_2 15$ 이다.